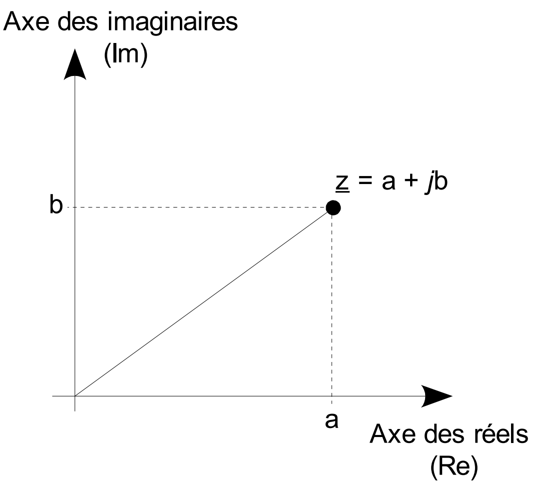
# I INTRODUCTION :

Comme il a été établi précédemment, à toute grandeur alternative sinusoïdale, nous pouvons associer un vecteur de Fresnel. Ce vecteur a pour norme ( ou module ) la valeur efficace et pour orientation ( ou argument ) la phase à l'origine.

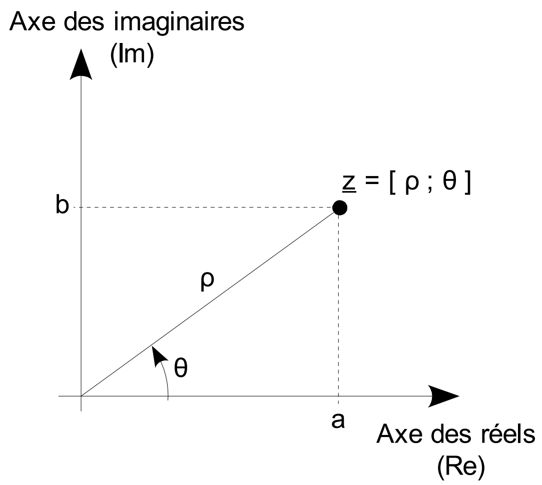
Pour faciliter les calculs et éviter des constructions graphiques, on peut aussi utiliser les nombres complexes.

Rappels :

On définit un nombre complexe par $z=a+jb$ tel que $j^2=-1$ (en maths $i^2=-1$ ).




Forme algébrique ou rectangulaire




Forme trigonométrique ou polaire

Un nombre complexe peut s'écrire sous deux formes ;

une **forme algébrique** ou **rectangulaire** $z=a+jb$ avec $a$ : partie réelle, $b$ : partie imaginaire

une **forme trigonométrique** ou **polaire** $z=[\rho;\theta]$ avec $\rho$ : module, $\theta$ : argument en [°] ou [rad]

## I.1 Passage de la forme rectangulaire à la forme polaire :

On passe de la forme rectangulaire à la forme polaire par :

$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$ [! uniquement valable en physique car $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ]

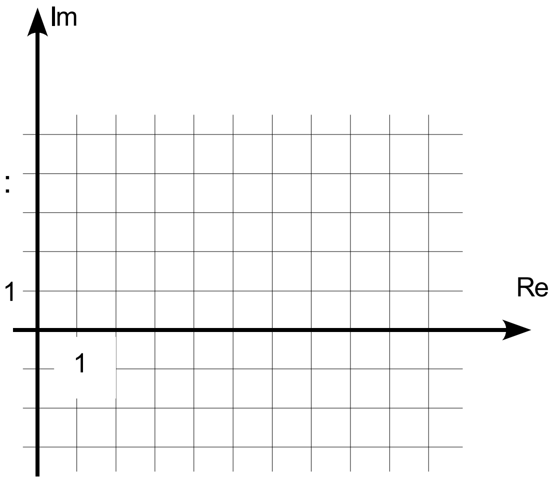
## I.2 Passage de la forme polaire à la forme rectangulaire :

On passe de la forme polaire à la forme rectangulaire par :

$a=\rho\cdot\cos\theta$ et $b=\rho\cdot\sin\theta$

## I.3 Exercice n°1:

Sur le graphe ci-contre, placer les nombres $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ :
$\underline{z}_1=6+4j$ et $\underline{z}_2=8-3j$ et $\underline{z}_3=[5;53,13°]$




Écrire les $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ nombres sous leurs formes polaires :

module $\rho_1=$
argument $\theta_1=$ et $\underline{z}_1=[\quad ; \quad]$

module $\rho_2=$
argument $\theta_2=$ et $\underline{z}_2=[\quad ; \quad]$

Écrire $\underline{z}_3$ sous sa forme rectangulaire et placer $\underline{z}_3$ sur la graphe :

partie réelle $a_3=$
partie imaginaire $b_3=$ et $\underline{z}_3=$____ + j _____

## I.4 Addition et soustraction de deux nombres complexes:

L'addition et la soustraction ne peut se faire qu'avec les formes rectangulaires.

Soient $\underline{z}_1=a_1+jb_1$ et $\underline{z}_2=a_2+jb_2$ .
On définit $\underline{a}=\underline{z}_1+\underline{z}_2=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2)$ et $\underline{s}=\underline{z}_1-\underline{z}_2=(a_1-a_2)+j(b_1-b_2)$

<u>Exercice</u> :
Soient $\underline{z}_1=6+4j$ et $\underline{z}_2=8-3j$ . Calculer $\underline{a}=\underline{z}_1+\underline{z}_2$ et $\underline{s}=\underline{z}_1-\underline{z}_2$ .

Les nombres $\underline{a}$ et $\underline{s}$ seront mis sous la forme rectangulaire et polaire.

## I.5 Multiplication de deux nombres complexes :

La multiplication de deux nombres complexes peut se faire indifféremment sous les deux formes.

Soient deux nombres complexes $\underline{z}_1=a_1+j\,b_1=[\rho_1;\theta_1]$ et $\underline{z}_2=a_2+j\,b_2=[\rho_2;\theta_2]$

Multiplication en utilisant les formes rectangulaires :
$\underline{z}_1\cdot\underline{z}_2=(a_1+jb_1)\times(a_2+jb_2)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+j(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)$

Multiplication en utilisant les formes polaires (beaucoup plus rapide):
$\underline{z}_1\cdot\underline{z}_2=[\rho_1;\theta_1]\times[\rho_2;\theta_2]=[\rho_1\cdot\rho_2;\theta_1+\theta_2]$

<u>Exercice</u> :

Soient $\underline{z}_1=6+4j$ et . $\underline{z}_2=[5;53,13°]$ Calculer $\underline{P}=\underline{z}_1\times\underline{z}_2$

Le nombre <u>P</u> sera mis sous la forme polaire puis rectangulaire en utilisant les transformations du § I.2.

## I.6 Division de deux nombres complexes :

On effectue la division de deux nombres complexes en utilisant les formes polaires.

Soient deux nombres complexes $\underline{z}_1=[\rho_1;\theta_1]$ et $\underline{z}_2=[\rho_2;\theta_2]$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}=\frac{[\rho_1;\theta_1]}{[\rho_2;\theta_2]}=\left[\frac{\rho_1}{\rho_2};\theta_1-\theta_2\right]$$

<u>Exercice</u> :

Soient $\underline{z}_1=6+4j$ et . $\underline{z}_2=8-3j$ Calculer $\underline{D}=\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$

Le nombre <u>D</u> sera mis sous la forme polaire puis rectangulaire en utilisant les transformations du § I.2.

## I.7 Conjugué , opposée et inverse d'un nombre complexe :

Soit $\underline{z}=a+jb=[\rho;\theta]$ un nombre complexe.

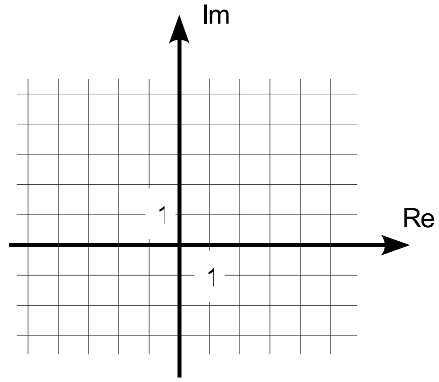
On définit **le conjugué** de <u>z</u> par : $\underline{z}^*=a-jb$ et $\underline{z}\cdot\underline{z}^*=(a+jb)\times(a-jb)=a^2+b^2=\rho^2$

On définit **l'opposé** de <u>z</u> par : $-\underline{z}=-a-jb$

On définit **l'inverse** de <u>z</u> par : $\frac{1}{\underline{z}}=\frac{1}{a+jb}=\frac{1}{[\rho;\theta]}=[\rho^{-1};-\theta]$

Soit $\underline{z}_1=4+3j$ , placer sur le graphe

$\underline{z}_1$ ; $\underline{z}_1^*$ et $-\underline{z}_1$



## I.8 Relations utiles :

Le chiffre **1** s'écrit sous forme polaire $[1;0]$

Le nombre **j** s'écrit sous forme polaire $[1;90°]$

$$\frac{1}{j}=\frac{j}{j\times j}=\frac{j}{j^2}=-j$$

Soit $\underline{z}=\dfrac{1}{a+jb}$ .

**Pour rendre réel le dénominateur**, on multiplie numérateur et dénominateur par son conjugué soit $\underline{z}=\dfrac{1}{a+jb}=\dfrac{a-jb}{(a+jb)\times(a-jb)}=\dfrac{a-jb}{a^2+b^2}$

## I.9 Exercices :

Soient les nombres suivant : $\underline{z}_1=4-3j$ ; $\underline{z}_2=2$ ; $\underline{z}_3=-5j$ ; $\underline{z}_4=[6;30°]$

Calculer ( résultats sous forme polaire et rectangulaire):

$\underline{z}_1\cdot\underline{z}_1^*=$

$\dfrac{\underline{z}_4}{\underline{Z}_2}=$

$\underline{z}_2+\underline{z}_3=$

$\underline{z}_1+\underline{z}_2-\underline{z}_3=$

$\underline{z}_4-\underline{z}_1=$

$-\underline{z}_4=$

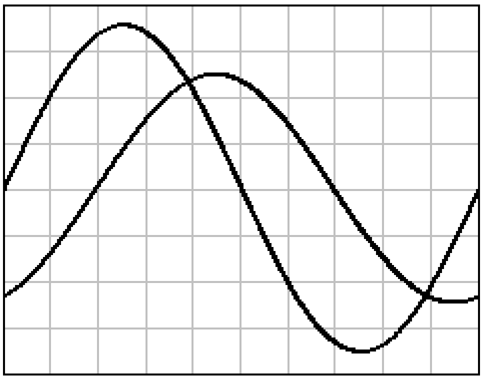
$\dfrac{\underline{z}_1\cdot\underline{z}_4}{\underline{z}_1+\underline{z}_4}=$

## II ASSOCIER UN NOMBRE COMPLEXE À UNE GRANDEUR ALTERNATIVE SINUSOÏDALE :

### II.1 Passage de u(t) à $\vec{U}$ à $\underline{U}$

Précédemment, nous avons vu qu'à toute grandeur alternative sinusoïdale u(t), nous pouvions faire correspondre le vecteur tournant $\vec{U}$ . Ce vecteur étant définit par $\vec{U}\left|\begin{array}{l}\text{module}\\ \text{argument}\end{array}\right|$ .

<u>Exemple</u> [ voie 1 : référence des phases ]:



Voie 1 : 2 V/div Voie 2 : 1 V/div

Base de temps : 2 ms/div

On visualise deux tensions à l'oscilloscope.
La voie 1 visualise la tension $u_1$ (t) [référence des phases].
La voie 2 visualise la tension $u_2$ (t).

**Caractéristiques de $u_1$ (t) :**

$$U_{1MAX}=3{,}5\,\text{DIV}\times 2\,\text{V/DIV}=7\,\text{V}\Rightarrow U_1=\frac{7}{\sqrt{2}}=4{,}95\,\text{V}$$

$$\varphi_1=0\,°$$

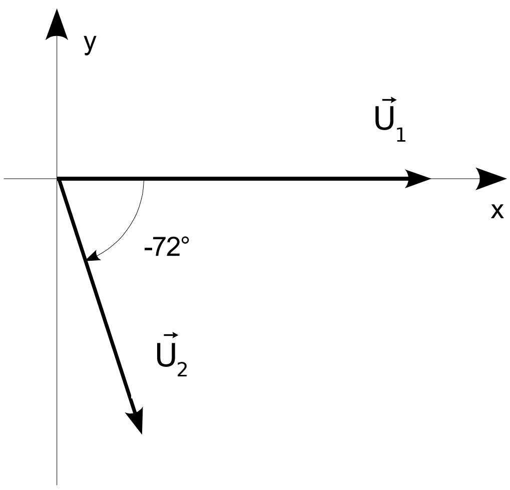
**Caractéristiques de $u_2$ (t) :**

$$U_{1MAX}=2{,}5\,\text{DIV}\times 2\,\text{V/DIV}=5\,\text{V}\Rightarrow U_2=\frac{5}{\sqrt{2}}=3{,}54\,\text{V}$$

$$\varphi_2=-72\,°$$

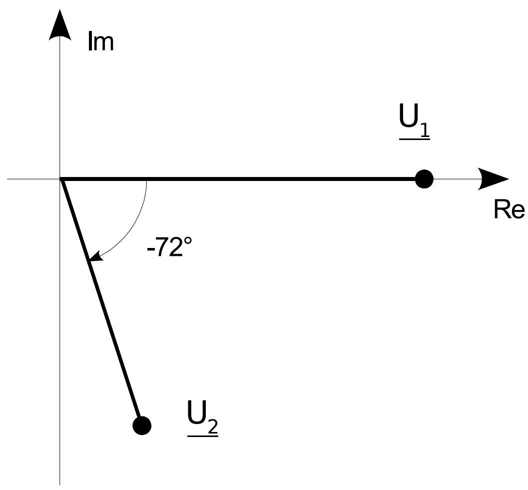
**Période** : $T=20\text{ms}$ et $f=\frac{1}{T}=50\text{ Hz}$

On peut représenter ces deux vecteurs dans le repère (x,y) ci-dessous :




$$\vec{U}_1\left|\begin{array}{l}U_1=4{,}95\,\text{V}\\ \varphi_1=0\,°\end{array}\right| \qquad \vec{U}_2\left|\begin{array}{l}U_2=3{,}54\,\text{V}\\ \varphi_2=-72\,°\end{array}\right|$$

On peut représenter les deux nombres $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ dans le plan complexe :




$$\underline{U_1}=[4{,}95\,\text{V}\,;0\,°]=4{,}95$$

$$\underline{U_2}=[3{,}54\,\text{V}\,;-72\,°]=1{,}09-3{,}37\,j$$

Exercices :

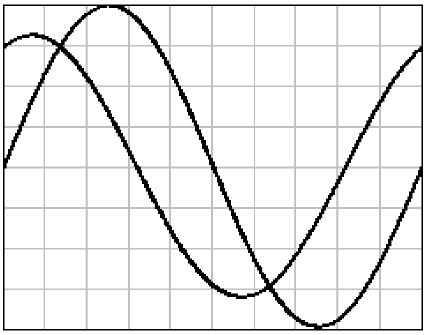
On relève les oscillogrammes ci-dessous. Pour tous les oscillogrammes, la voie 1 est prise comme référence des phases.

On appelle $u_1$ la tension visualisée sur la voie 1 et $u_2$ la tension visualisée sur la voie 2.

Déterminer pour chaque oscillogramme le nombre complexe associé à $u_1(t)$ et le nombre complexe associé à $u_2(t)$. Les résultats seront mis sous forme polaire et rectangulaire.

**Voie 1 : 2 V/div ; voie 2 : 2 V/div ; Base de temps : 2 ms /div**

Oscillogramme n°1



$U_{1MAX}$ =

$U_1$ =

$\varphi_1$ =

$\underline{U}_1$ = [ ; ]

$\underline{U}_1$ =

$U_{2MAX}$ =

$U_2$ =

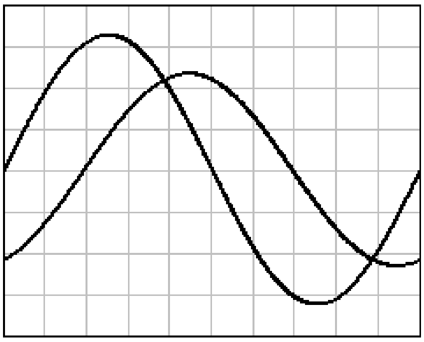
$\varphi_2$ =

$\underline{U}_2$ = [ ; ]

$\underline{U}_2$ =

$\underline{U}_1$ en par rapport à $\underline{U}_2$

Oscillogramme n°2



$U_{1MAX}$ =

$U_1$ =

$\varphi_1$ =

$\underline{U}_1$ = [ ; ]

$\underline{U}_1$ =

$U_{2MAX}$ =

$U_2$ =

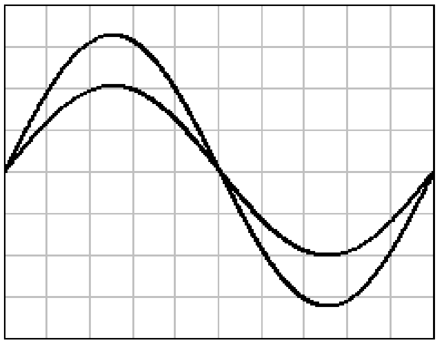
$\varphi_2$ =

$\underline{U}_2$ = [ ; ]

$\underline{U}_2$ =

$\underline{U}_1$ en par rapport à $\underline{U}_2$

Oscillogramme n°3



$U_{1MAX}$ =

$U_1$ =

$\varphi_1$ =

$\underline{U}_1$ = [ ; ]

$\underline{U}_1$ =

$U_{2MAX}$ =

$U_2$ =

$\varphi_2$ =

$\underline{U}_2$ = [ ; ]

$\underline{U}_2$ =

$\underline{U}_1$ en par rapport à $\underline{U}_2$

Pour l'oscillogramme n°1, calculer $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$

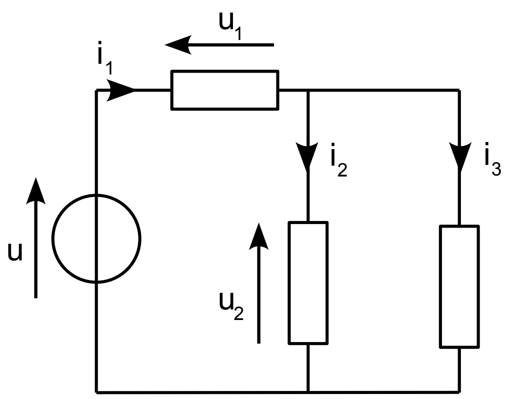
Pour l'oscillogramme n°2, calculer $\underline{U}_4 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

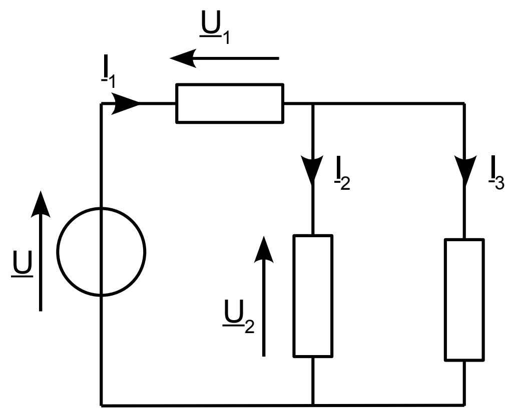
Pour l'oscillogramme n°2, calculer $\underline{U}_5 = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$

## II.2 Les lois de l'électricité avec avec les nombres complexes :

Toutes les lois vues pour le régime continu sont valables en alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les nombres complexes.

Notation avec les grandeurs temporelles : Notation avec les nombres complexes :

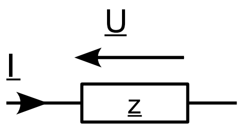



### II.2.a. Loi des nœuds , loi des mailles :

Loi des nœuds : $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ ; loi des mailles : $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

### II.2.b. Loi d'ohm en alternatif sinusoïdal :



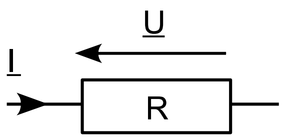
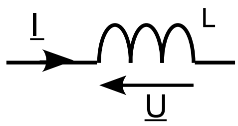
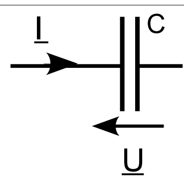

On appelle $\underline{Z}$ l'impédance complexe d'un dipôle quelconque.

La loi d'ohm s'écrit $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

### II.2.c. Impédance complexe des dipôles élémentaires :

Toute impédance peut-être écrite sous forme complexe i.e : $\underline{Z} = [Z; \varphi]$

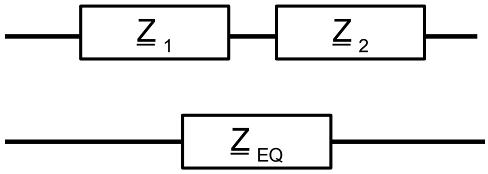
avec Z en $[\Omega]$ et $\varphi_{(\underline{I},\underline{U})}$ en $[°]$ ou [ rad ] .

| Dipôle | R | L | C |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| Impédance forme polaire | $\underline{Z}_R = [R; 0°]$ | $\underline{Z}_L = [L \cdot \omega; +90°]$ | $\underline{Z}_C = \left[\frac{1}{C \cdot \omega}; -90°\right]$ |
| Impédances forme rectangulaire | $\underline{Z}_R = R$ | $\underline{Z}_L = jL\omega$ | $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$ |

### II.2.d. Impédance équivalente :

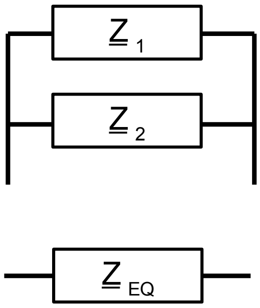
Soient deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ branchées en série

L'impédance équivalente équivalente $\underline{Z}_{EQ}$ est :




$$\underline{Z}_{EQ} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Soient deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ branchées en parallèle :




$$\underline{Z}_{EQ} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

On appelle $\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{\underline{Z}_1}$ l'admittance de dipôle 1 et

$\underline{Y}_2 = \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$ l'admittance de dipôle 2 .

L'admittance équivalente de ce montage est $\underline{Y}_{EQ} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ avec $\underline{Y}_{EQ} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{EQ}}$

### II.2.e. Exercices :

On dispose d'une résistance R = 100 Ω , d'une inductance L = 0,3 H et d'un condensateur C = 20 µF. Le montage est alimenté par une tension $u(t) = 5 \sin(2 \cdot \pi \times 100\, t)$

1- Calculer les impédances de chacun des dipôles élémentaires $\underline{Z}_R$ , $\underline{Z}_L$ et $\underline{Z}_C$ . (forme polaire et rectangulaire)

2- On branche la résistance R en série avec l'inductance L. Calculer l'impédance équivalente de ce montage $\underline{Z}_{EQ}$.

3- En déduire la valeur de l'intensité $\underline{I}$ et préciser la valeur de $\varphi_{(\underline{I},\underline{U})}$ .

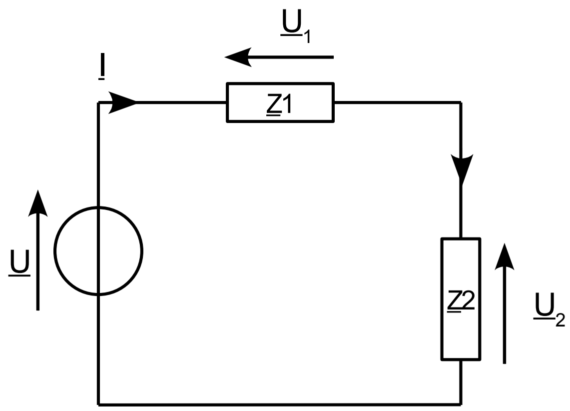
4- Calculer alors la valeur de la tension $\underline{U}_R$ aux bornes de R et la valeur de la tension $\underline{U}_L$ aux bornes de L et vérifier que $\underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{U}$

5- On branche maintenant la résistance R en dérivation avec le condensateur C. Calculer la valeur de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{EQ}$.

6- En déduire la valeur de l'intensité $\underline{I}$ et préciser la valeur de $\varphi_{(\underline{I},\underline{U})}$ .

7- Calculer alors la valeur de l'intensité $\underline{I}_R$ dans R et la valeur de l'intensité $\underline{I}_L$ dans L et vérifier que $\underline{I}_R + \underline{I}_L = \underline{I}$

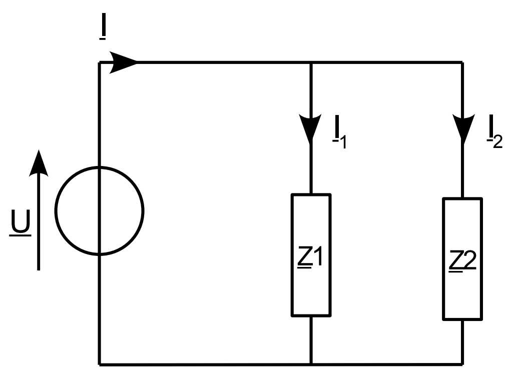
**II.2.f. Diviseur de tension :**




$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$$

**II.2.g. Diviseur de courant :**



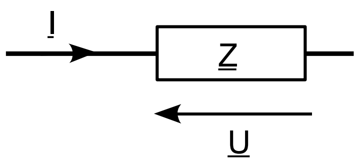

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$$

Exercice : Refaire la question 4 du § II.2.e en utilisant le diviseur de tension.

Refaire la question 7 du § II.2.e en utilisant le diviseur de courant.

# III PUISSANCES EN ALTERNATIF SINUSOÏDAL :




La tension u(t) a pour tension efficace U
L'intensité i(t) a pour valeur efficace I
On définit $\varphi_{(\underline{I},\underline{U})}$ le déphasage de $\underline{I}$ vers $\underline{U}$ avec $-90° \leqslant \varphi \leqslant +90°$

## III.1 Puissance active P :

La puissance active P est définit par $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ en Watt [W].
Cette puissance est toujours positive ou nulle et se mesure avec un wattmètre.

## III.2 Puissance réactive Q :

La puissance réactive Q est définit par $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ en volt-ampère réactif [var].
Cette puissance peut-être positive , nulle ou négative car $-90° \leqslant \varphi \leqslant +90°$ .
Cette puissance n'a pas de sens physique, c'est un intermédiaire de calcul.
En général, on calcule cette puissance ; quelquefois, on la mesure avec un varmètre (branchement identique que celui d'un wattmètre).

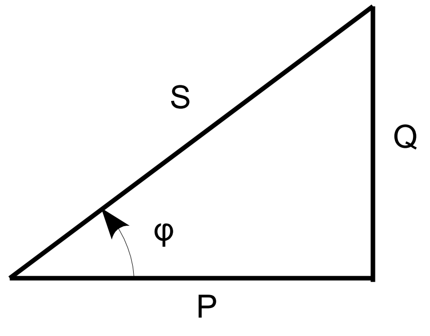
## III.3 Puissance apparente S :

La puissance apparente S est définit par $S = U \cdot I$ en Volt-Ampère [VA].
Cette puissance est aussi un intermédiaire de calcule, elle est aussi appelée puissance de dimensionnement.

## III.4 Facteur de puissance $f_P$ :

Le facteur de puissance d'un montage est définit par $f_P = \frac{P}{S}$ . Dans le cas de l'alternatif sinusoïdal, $f_P = \frac{P}{S} = \frac{U \cdot I \cdot \cos\varphi}{U \cdot I} = \cos\varphi$ . C'est un nombre sans dimension et $-1 \leqslant f_P \leqslant 1$ .

## III.5 Triangle des puissances :




Relation dans le triangle des puissances :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$Q = P \cdot \tan\varphi$$

## III.6 Exercices :

Une installation est alimenté par une tension alternative sinusoïdale $\underline{U}=[230\,V;0]$ et absorbe l'intensité $\underline{I}=[10\,A;30°]$ .

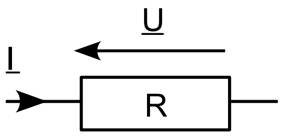
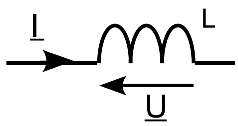
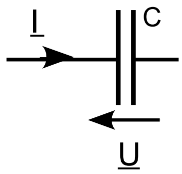
1-Calculer la puissance active P absorbée par l'installation.

2- Calculer la puissance réactive Q absorbée par l'installation.

3- Calculer la puissance apparente S absorbée par l'installation.

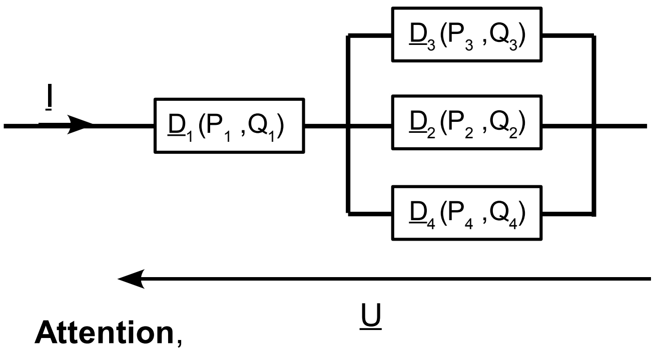
4- En déduire le facteur de puissance de l'installation.

## III.7 Les différentes puissances pour les dipôles élémentaires :

| Dipôle | R | L | C |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| P [ W ] | $P_R=R\cdot I^2$ ou $P_R=\frac{U^2}{R}$ | $P_L=0$ | $P_C=0$ |
| Q [var] | $Q_R=0$ | $Q_L=L\omega\cdot I^2$ ou $Q_L=\frac{U^2}{L\omega}$ | $Q_C=-U^2\cdot C\omega$ ou $Q_C=\frac{-I^2}{C\omega}$ |

## III.8 Théorème de Boucherot :

Un montage est composé de N dipôles $D_1$ , $D_2$ , ... , $D_N$ branchés en série ou parallèle. Chacun des dipôles absorbe la puissance active Pi et la puissance réactive $Q_i$.

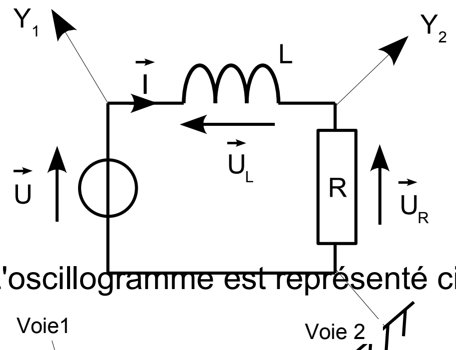



La puissance active totale absorbée par ce montage est $P_T=P_1+P_2+...+P_N$

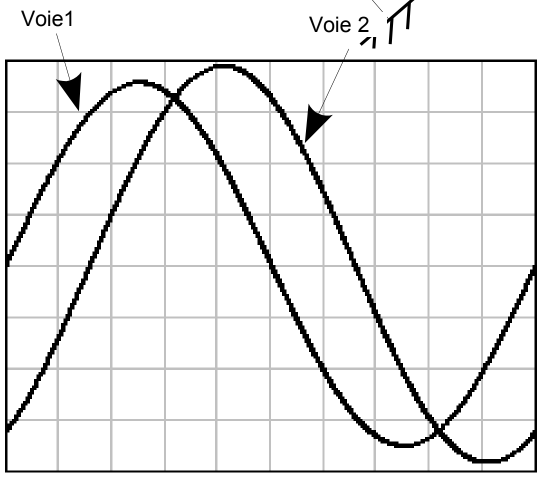
La puissance réactive totale absorbée par le montage est : $Q_T=Q_1+Q_2+...+Q_N$

**Attention**,

la puissance apparente de ce montage est $S_T=\sqrt{P_T^2+Q_T^2}$ et le facteur de puissance de ce montage est alors $f_P=\frac{P_T}{S_T}$ .




L'oscillogramme est représenté ci-dessous :




Voie 1 : 2 V/div    Voie 2 : 1 V/div

Base de temps : 0,1 ms/div

6- Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(\vec{I}, \vec{U})$ et préciser si le courant i(t) est en avance ou en retard par rapport à la tension u(t).

7- On branche un voltmètre numérique aux bornes du GBF.
7.1- Quelle type de tension mesure-t-il sur la position DC ?

7.2- Quelle valeur affiche-t-il ?

7.3- Quelle type de tension mesure-t-il sur la position AC+DC ?

7.4- Quelle valeur affiche-t-il ?

Pour la suite du problème, on prend f = 1 kHz , R = 820 Ω ,L = 0,2 H et I = 3,3 mA.

8- Déterminer les caractéristiques de l'impédance $Z_R$ :

$Z_R$ = ; $\varphi_R$ =

9- Déterminer les caractéristiques de l'impédance $Z_L$ :

$Z_L$ = ; $\varphi_L$ =

10- En utilisant la loi d'ohm en alternatif sinusoïdal, déterminer les caractéristiques des tensions :

$\vec{U}_R \begin{vmatrix} U_R = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \varphi_R = \_\_\_\_\_\_\_\_ ° \end{vmatrix}$ $\vec{U}_L \begin{vmatrix} U_L = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \varphi_L = \_\_\_\_\_\_\_\_ ° \end{vmatrix}$

11- Établir la relation entre les tensions $\vec{U}_R$ ,$\vec{U}_L$ et $\vec{U}$

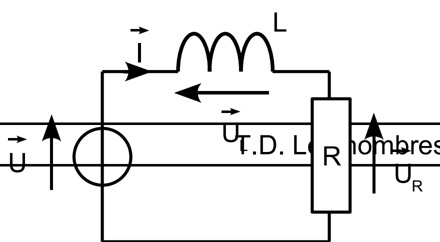
12- En prenant pour échelle 1 V ↔ 2 cm , en prenant $\vec{I}$ comme axe de référence, tracer $\vec{U}_R + \vec{U}_L = \vec{U}$ .

13- En déduire les caractéristiques de la tension u(t) :

$\vec{U} \begin{vmatrix} U = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \varphi = \_\_\_\_\_\_\_\_ ° \end{vmatrix}$

14- Et en utilisant la loi d'ohm en alternatif, déterminer la valeur de l'impédance Z du montage :

Z =




$\varphi_{RL}$ =

$\vec{I}$ : axe de référence.

15- En utilisant la représentation vectorielle ci-dessus, montrez que l'impédance équivalente du montage est $Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$ et que le déphasage imposée par la charge est $\varphi=\tan^{-1}\frac{L\omega}{R}$ .