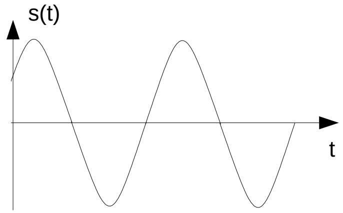
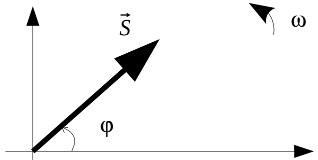
T.P. n°.... Utilisation des nombres complexes en é lectricité.

I Introduction :

Toute grandeur alternative sinusoïdale de type $s(t)=S\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$ peut être représentée par un vecteur de Fresnel tournant à la vitesse ω dans le sens trigonométrique.



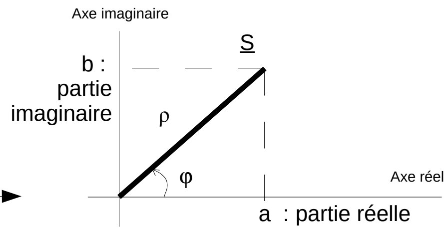
Représentation temporelle
$s(t)=S\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$



Représentation vectorielle
vecteur $\vec{S}$ $\begin{cases} Norme : S \\ Direction : \varphi \end{cases}$

L'utilisation des vecteurs pour les calculs (somme, soustraction) nécessite souvent une résolution graphique qui n'est pas forcément rapide, pour cela, on peut associer à un vecteur à son équivalent en complexe.

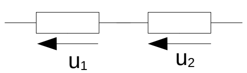
Représentation vectorielle



Représentation complexe

$\underline{S}=a+jb$ ou
$\underline{S}=[\rho;\varphi]$ $\rho=$ valeur efficace S
$\varphi=$déphasage en ° ou rad.

Exemple :



$u_1(t)=12\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{3})$

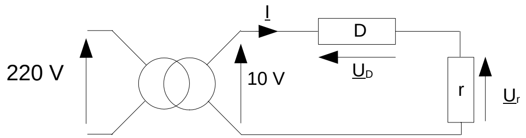
$u_2(t)=8{,}49\sin(\omega t-\frac{\pi}{4})$

1- Donner les expressions numériques de $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ sous les formes polaire (module, argument) et rectangulaire (a + jb).

2- Calculer $\underline{U}=\underline{U}_1+\underline{U}_2$.

II Détermination des impédances complexes des dipôles passifs.

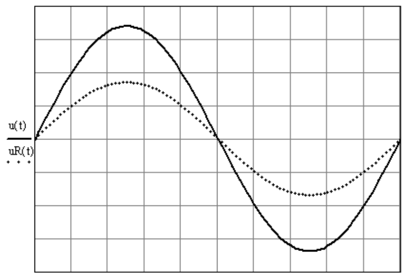
1- Montage :



Matériel : Transformateur 220 V / 10 V;
Oscilloscope bicourbe. Le transformateur permet d'isoler le montage de la terre.
r : Résistance (de visualisation) de 100 Ω
D : Dipôle à étudier (R , L ou C)

2- Préparation : Placer sur le montage ci-dessus les voies 1 et 2 de l'oscilloscope permettant de visualiser simultanément sur la voie 1 la tension $u_D(t)$ et sur la voie 2 l'image du courant i(t).
$\varphi(\vec{I};\vec{U})$: représente le déphasage de $\vec{I}$ par rapport à $\vec{U}$.

3- Impédance complexe d'une résistance R.
Le dipôle D est une résistance R = 100 Ω.
L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 10 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 20 V/div

En déduire la valeur de $I=\frac{U_R}{r}$ =

ainsi que son déphasage $\varphi_R(\vec{I},\vec{U}_R)$ =

Etablir les expressions complexes polaires de :
$\underline{U}_R$ = [,] et de $\underline{I}$ = [,]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U}_R=\underline{Z}_R\cdot\underline{I}\Rightarrow\underline{Z}_R=\frac{\underline{U}_R}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z}_R=\frac{\underline{U}_R}{\underline{I}}=\frac{[\quad;\quad]}{[\quad;\quad]}=[\quad;\quad]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z}_R$ d'une résistance R :

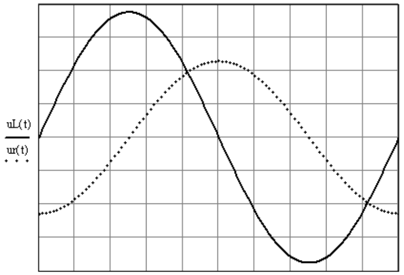
Module ρ :
Argument φ :

$\underline{Z}_R=[\quad;\quad]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z}_R=$: forme rectangulaire ou algébrique.

4- *Impédance complexe d'une inductance L.*

Le dipôle D est une inductance L = 0,013 H.
L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 5 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 10 V/div

En déduire la valeur de $I = \frac{U_r}{r} =$

ainsi que son déphasage $\varphi_L(\vec{I}, \vec{U}_L) =$

Etablir les expressions complexes polaires de :
$\underline{U}_L$ = [,] et de $\underline{I}$ = [,]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = \frac{[\quad ; \quad]}{[\quad ; \quad]} = [\quad ; \quad]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z}_L$ d'une inductance L :

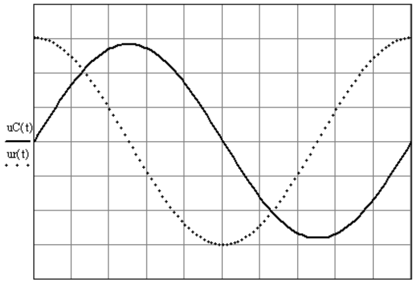
Module ρ :
Argument φ :

$\underline{Z}_L = [\quad ; \quad]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z}_L = j$: forme rectangulaire ou algébrique.

5- *Impédance complexe d'un condensateur C.*

Le dipôle D est un condensateur C = 200 nF.
L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 5 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 10 V/div

En déduire la valeur de $I = \frac{U_r}{r} =$

ainsi que son déphasage $\varphi_C(\vec{I}, \vec{U}_C) =$

Etablir les expressions complexes polaires de :
$\underline{U}_C$ = [,] et de $\underline{I}$ = [,]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}} = \frac{[\quad ; \quad]}{[\quad ; \quad]} = [\quad ; \quad]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z}_C$ d'un condensateur C:

Module ρ :
Argument φ :

$\underline{Z}_C = [\quad ; \quad]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z}_C = j$ ou $\underline{Z}_C = -$: forme rectangulaire ou algébrique.

III Exercices :

Rappels : Toutes les lois établies en régime continue sont valables en alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les nombres complexes.

Liste non-exhaustive.

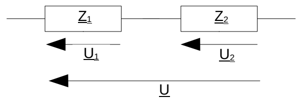
Loi d'ohm : $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$.

Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en série : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$.

Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en // : $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

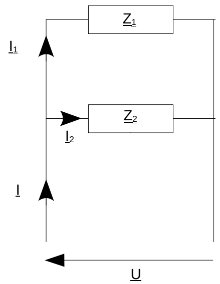
Loi des mailles : $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$
Loi des noeuds : $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

Diviseur de tension :



$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$ et $\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$

Diviseur de courant :



$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$

$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$

Exercice n°1 :

On place en série une résistance R = 100 Ω et un condensateur C = 50 μF alimentés par une tension $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(2\pi \cdot 50\, t)$.

1- Représenter le montage en fléchant les différentes tensions et l'intensité i(t).
2- Établir les expressions numériques des impédances $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_C$.
3- En déduire l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ sous la forme [module;argument].
4- Calculer $\underline{I}$.
5- Préciser quelle grandeur est en avance par rapport à l'autre (e et i).

Exercice n°2 :

On place en parallèle une résistance R = 600 Ω avec un bobine d'inductance L = 1 H. L'ensemble est alimenté par une tension $u(t) = 42{,}4\sin(2\pi \cdot 100\, t)$.

1- Représenter le montage en fléchant les différentes intensités et u(t).
2- Établir les expressions numériques des impédances $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_L$.
3- En déduire l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ sous la forme [module;argument].
4- Calculer $\underline{I}$.
5- Préciser quelle grandeur est en avance par rapport à l'autre pour u et i.

Exercice n°3 :

Un circuit composé d'une résistance R , d'une inductance L et d'un condensateur C sont branchés en série et alimentés par une tension alternative sinusoïdale u(t) de fréquence f = 100 Hz.

La tension aux bornes de chaque élément R, L et C (l'intensité i est prise comme référence des phases est respectivement :

$\underline{U_R}=[10\ V;0];\underline{U_L}=[31{,}4\ V;90°]\ et\ \underline{U_C}=[10{,}6\ V;-90°]$.

1- Calculer la tension $\underline{U}$ délivrée par le générateur.

2- La valeur de la résistance R = 100 Ω , de l'inductance L = 0,5 H et du condensateur C = 15 µF. Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du montage.

3- En déduire la valeur de $\underline{I}$ et préciser si i est en avance/retard par rapport à u.

4- Montrez que l'impédance $\underline{Z}=R+j\left(L\cdot\omega-\frac{1}{C\cdot\omega}\right)$.

5- Montrez que u et i sont en phase (résonance) si $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Calculer cette valeur.

Exercice n°4 :

Les trois dipôles sont maintenant branchés en parallèle est alimentés par la même tension u(t) trouvée à l'exercice n°3.

1- Calculer les intensités $\underline{I_R}$, $\underline{I_L}$ et $\underline{I_C}$.

2- En déduire la valeur de $\underline{I}$ (intensité débité par le générateur) et préciser si i est en avance/retard par rapport à u.

3- Déterminer ensuite la valeur de l'impédance $\underline{Z}$ du montage.

4- Montrer que $\underline{Z}=\frac{R}{1-jR\left(\frac{1}{L\omega}-C\omega\right)}$.

5- Pour quelle valeur de la fréquence f a-t-on la résonance ? i.e. : u et i sont en phase.

Exercice n°5 :

Un générateur délivre une tension $\underline{U}=[10\ V;0]$ de fréquence f = 2 kHz et alimente un dipôle inconnu D.

L'intensité qu'il débite est $\underline{I}=[17\ mA;-38°]$.

1- Préciser quelle grandeur est en avance/retard l'une par rapport à l'autre et en déduire la valeur de $\varphi(\underline{I},\underline{U})$.

2- Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle.

3- Le dipôle D est constitué d'une résistance R en série avec une inductance L. Déterminer la valeur de R ainsi que l'impédance de l'inductance Z_L et la valeur de L.

Exercice n°6 :

Un circuit est composé de deux dipôles D_1 et D_2 branchés en série et sont alimentés par un générateur qui délivre une tension $\underline{U}=[10\ V;0]$ et une intensité $\underline{I}$; f = 3 kHz.

D_1 est une résistance de 15 kΩ et D_2 est une inductance de 0,9 H.

1- Déterminer la tension $\underline{U_1}$ aux bornes de D_1 en utilisant le diviseur de tension.

2- Déterminer la tension $\underline{U_2}$ aux bornes de D_2 en utilisant le diviseur de tension.

3- Vérifier que $\underline{U_1}+\underline{U_2}=\underline{U}$.

4- Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du montage et en déduire la valeur de l'intensité $\underline{I}$.

5- Donner la valeur de $\varphi(\underline{I},\underline{U})$.

Exercice n°7 :

Même exercice que le numéro 6 avec D_1 est une résistance de 5 kΩ et D_2 est un condensateur de 10 nF.