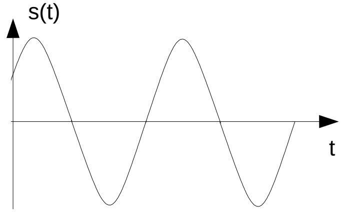
T.P. n°.... Utilisation des nombres complexes en é lectricité.

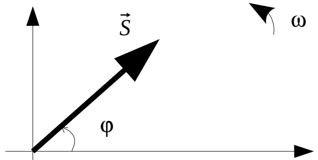
I Introduction :

Toute grandeur alternative sinusoïdale de type $s(t)=S\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$ peut être représentée par un vecteur de Fresnel tournant à la vitesse ω dans le sens trigonométrique.



Représentation temporelle

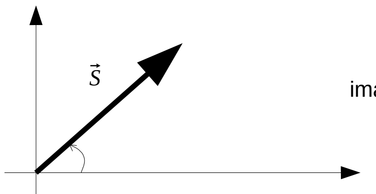
$s(t)=S\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$



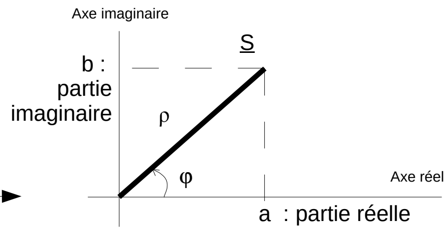
Représentation vectorielle

vecteur $\vec{S}$ $\left\{\begin{matrix} Norme : S \\ Direction : \varphi \end{matrix}\right\}$

L'utilisation des vecteurs pour les calculs (somme, soustraction) nécessite souvent une résolution graphique qui n'est pas forcément rapide, pour cela, on peut associer à un vecteur à son équivalent en complexe.



Représentation vectorielle



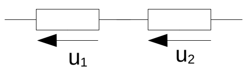
Représentation complexe

$\underline{S}=a+jb$ ou

$\underline{S}=[\rho\,;\varphi]$ $\quad \rho=$ valeur efficace S

$\varphi=$ déphasage en ° ou rad.

Exemple :



$u_1(t)=12\sqrt{2}\sin(\omega t+\frac{\pi}{3})$

$u_2(t)=8{,}49\sin(\omega t-\frac{\pi}{4})$

1- Donner les expressions numériques de $\underline{U_1}$ et $\underline{U_2}$ sous les formes polaire (module, argument) et rectangulaire (a + jb).

$\underline{U_1}=[12\ V\,;+60°]$ ou $\underline{U_1}=12\times\cos(60)+j\times 12\times\sin(60)=6+10{,}39\ j$

$\underline{U_2}=[\frac{8{,}49}{\sqrt{2}}V=6\ V\,;-45°]$ ou $\underline{U_1}=6\times\cos(-45)+j\times 6\times\sin(-45)=4{,}24-4{,}24\ j$

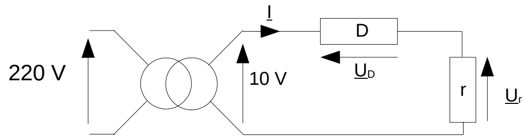
2- Calculer $\underline{U}$ = $\underline{U_1}$ + $\underline{U_2}$.

$\underline{U}=\underline{U_1}+\underline{U_2}=(6+4{,}24)+j(10{,}39-4{,}24)=10{,}24+6{,}15\ j$

$\underline{U}=[\sqrt{10{,}24^2+6{,}15^2}\,;atan\frac{6{,}15}{10{,}24}]=[13{,}4\ V\,;31\ °]$

II Détermination des impédances complexes des dipôles passifs.

1- Montage :



Matériel : Transformateur 220 V / 10 V;

Oscilloscope bicourbe. Le transformateur permet d'isoler le montage de la terre.

r : Résistance (de visualisation) de 100 Ω

D : Dipôle à étudier (R , L ou C)

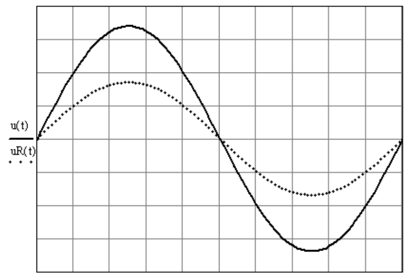
2- Préparation : Placer sur le montage ci-dessus les voies 1 et 2 de l'oscilloscope permettant de visualiser simultanément sur la voie 1 la tension $u_D(t)$ et sur la voie 2 l'image du courant i(t).

$\varphi(\vec{I}\,;\vec{U})$: représente le déphasage de $\vec{I}$ par rapport à $\vec{U}$.

3- *Impédance complexe d'une résistance R.*

Le dipôle D est une résistance R = 100 Ω.

L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 10 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 20 V/div

En déduire la valeur de $I=\frac{U_R}{r}$ = 240 mA

ainsi que son déphasage $\varphi_R(\vec{I},\vec{U}_R)$ = 0°

Etablir les expressions complexes polaires de :

$\underline{U_R}$ = [24 V ; 0°] et de $\underline{I}$ = [0,24 A; 0°]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U_R}=\underline{Z_R}\cdot\underline{I}\Rightarrow\underline{Z_R}=\frac{\underline{U_R}}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z_R}=\frac{\underline{U_R}}{\underline{I}}=\frac{[\ 24\ ;\ 0\ ]}{[\ 0{,}24\ ;\ 0\ ]}=[\frac{24}{0{,}24}=100\ \Omega\,;0-0=0°]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z_R}$ d'une résistance R :

Module ρ : R

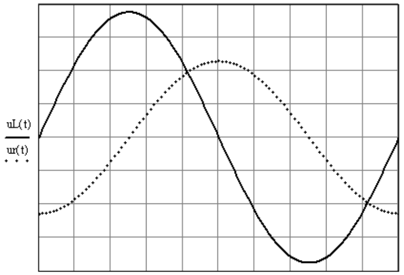
Argument φ : 0

$\underline{Z_R}=[\ R\ ;\ 0°\ ]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z_R}=R$: forme rectangulaire ou algébrique.

4- *Impédance complexe d'une inductance L.*

Le dipôle D est une inductance L = 0,013 H.
L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 5 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 10 V/div

En déduire la valeur de $I=\frac{U_r}{r}$ = 163 mA

ainsi que son déphasage $\varphi_L(\vec{I},\vec{U}_L)$ = + 90 °

Etablir les expressions complexes polaires de :
$\underline{U_L}$ = [13,4 V; 0°] et de $\underline{I}$ = [0,163 A , -90°]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U_L}=\underline{Z_L}\cdot\underline{I}\Rightarrow\underline{Z_L}=\frac{\underline{U_L}}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z_L}=\frac{\underline{U_L}}{\underline{I}}=\frac{[13,4\ ;0\ ]}{[\ 0,163\ ;-90\ ]}=[82,2\ \Omega;\ 0\text{- (-90)} = 90°\ ]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z_L}$ d'une inductance L :

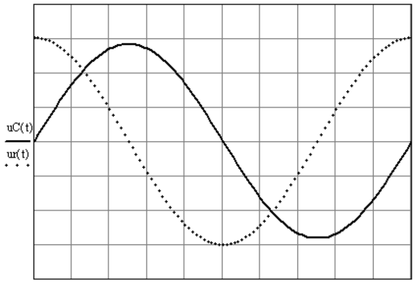
Module ρ : $L\omega$ Argument φ : $\frac{+\pi}{2}$

$\underline{Z_L}=[L\omega;+90°]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z_L}=jL\omega$: forme rectangulaire ou algébrique.

5- *Impédance complexe d'un condensateur C.*

Le dipôle D est un condensateur C = 200 nF.
L'oscillogramme des tensions est représentées ci-dessous :



Voie 1 : 5 V/div Time : 0,1 ms/div
Voie 2 : 10 V/div

En déduire la valeur de $I=\frac{U_r}{r}$ = 212 mA

ainsi que son déphasage $\varphi_C(\vec{I},\vec{U}_C)$ = -90°

Etablir les expressions complexes polaires de :
$\underline{U_C}$ = [10,2 V ; 0°] et de $\underline{I}$ = [0,212 A ; +90°]

En appliquant la loi d'ohm : $\underline{U_C}=\underline{Z_C}\cdot\underline{I}\Rightarrow\underline{Z_C}=\frac{\underline{U_C}}{\underline{I}}$

calculer l'impédance complexe

$\underline{Z_C}=\frac{\underline{U_C}}{\underline{I}}=\frac{[10,2\ V\ ;\ 0°\ ]}{[0,212\ A\ ;\ +90°\ ]}=[\ 780\ \Omega\ \ ;\ -90°\ ]$

Expression générale de l'impédance $\underline{Z_C}$ d'un condensateur C:

Module ρ : $\frac{1}{C\cdot\omega}$ Argument φ : $\frac{-\pi}{2}$

$\underline{Z_C}=[\frac{1}{C\cdot\omega};-90°]$: forme polaire ou trigonométrique.

$\underline{Z_C}=\frac{1}{jC\omega}$ ou $\underline{Z_C}=-\frac{j}{C\omega}$: forme rectangulaire ou algébrique.

III Exercices :

Rappels : Toutes les lois établies en régime continue sont valables en alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les nombres complexes.

Liste non-exhaustive.

Loi d'ohm : $\underline{U}=\underline{Z}\cdot\underline{I}$.

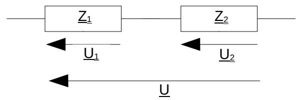
Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série : $\underline{Z_{eq}}=\underline{Z_1}+\underline{Z_2}$.

Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en // : $\underline{Z_{eq}}=\frac{\underline{Z_1}\cdot\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$.

Loi des mailles : $\underline{U}=\underline{U_1}+\underline{U_2}$

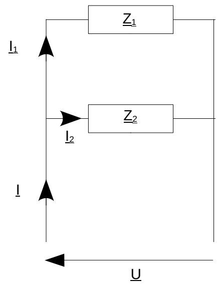
Loi des noeuds : $\underline{I}=\underline{I_1}+\underline{I_2}$

Diviseur de tension :



$\underline{U_1}=\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}$ et $\underline{U_2}=\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}$

Diviseur de courant :



$\underline{I_1}=\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{I}$

$\underline{I_2}=\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{I}$

Exercice n°1 :

On place en série une résistance R = 100 Ω et un condensateur C = 50 µF alimentés par une tension $e(t)=10\sqrt{2}\sin(2\pi\cdot 50\ t)$.

1- Représenter le montage en fléchant les différentes tensions et l'intensité i(t).

2- Établir les expressions numériques des impédances $\underline{Z_R}$ et $\underline{Z_C}$.

$\underline{Z_R}=[R;0]=[100\ ;0]=100$ et $\underline{Z_C}=[\frac{1}{C\omega};-90]=[63,7\ \ ;\ -90]=-63,7\ j$

3- En déduire l'impédance équivalente $\underline{Z_{eq}}$ sous la forme [module;argument].

$\underline{Z_{EQ}}=\underline{Z_R}+\underline{Z_C}=100-63,7\ j=[118,5\ \ ;\ -32,5\ °]$

4- Calculer $\underline{I}$.

$\underline{E}=\underline{Z_{EQ}}\cdot\underline{I}\Rightarrow\underline{I}=\frac{\underline{E}}{\underline{Z_{EQ}}}=\frac{[10\ \ ;\ \ 0]}{[118,5\ ;\ -32,5]}=[84\ mA;32,5°]$

5- Préciser quelle grandeur est en avance par rapport à l'autre (e et i).

Le courant i est en avance de -32,5°par rapport à e : $\varphi(\underline{I},\underline{E})=-32,5°$

Exercice n°2 :

On place en parallèle une résistance R = 600 Ω avec un bobine d'inductance L = 1 H. L'ensemble est alimenté par une tension $u(t)=42{,}4\ \sin(2\ \pi\cdot 100\ t)$.

1- Représenter le montage en fléchant les différentes intensités et u(t).

2- Établir les expressions numériques des impédances $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_L$.

$\underline{Z}_R=[R;0]=[600\ ;0]=600$ et $\underline{Z}_L=[L\omega\,;+90]=[628{,}3\ ;+90°]$

3- En déduire l'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ sous la forme [module;argument].

$$\underline{Z}_{eq}=\frac{\underline{Z}_R\times\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_L}=\frac{[600\ ;0]\times[628{,}3\ ;+90]}{600\ +628{,}3\ j}=\frac{[376991{,}1\ ;90]}{[868{,}78\ ;46{,}32]}=[433{,}9\ \Omega\,;43{,}7\ °]$$

4- Calculer $\underline{I}$.

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}}=\frac{[30\ ;0]}{[433{,}9\ ;43{,}7]}=[69{,}1\ mA\,;-43{,}7\ °]$$

5- Préciser quelle grandeur est en avance par rapport à l'autre pour u et i.

2 L'intensité i est en retard par rapport à u : $\varphi(\underline{I},\underline{U})=43{,}7\ °$

Exercice n°3 :

Un circuit composé d'une résistance R , d'une inductance L et d'un condensateur C sont branchés en série et alimentés par une tension alternative sinusoïdale u(t) de fréquence f = 100 Hz.

La tension aux bornes de chaque élément R, L et C (l'intensité i est prise comme référence des phases est respectivement :

$\underline{U}_R=[10\ V\,;0\ ]\,;\underline{U}_L=[31{,}4\ V\,;90\ °]\ et\ \underline{U}_C=[10{,}6\ V\,;-90\ °]$.

1- Calculer la tension $\underline{U}$ délivrée par le générateur.

Montage série : $\underline{U}=\underline{U}_R+\underline{U}_L+\underline{U}_C=10\ +31{,}4\ j-10{,}6\ j=10\ +20{,}8\ j=[23{,}1\ V\,;64{,}3°]$

L'intensité i est en retard par rapport à u et $\varphi(\underline{I},\underline{U})=64{,}3\ °$

2- La valeur de la résistance R = 100 Ω , de l'inductance L = 0,5 H et du condensateur C = 15 µF. Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du montage.

$$\underline{Z}=\underline{Z}_R+\underline{Z}_L+\underline{Z}_C=100\ +0{,}5\times 2\ \cdot\pi\cdot 100\ j-\frac{1}{15\ \cdot 10^{-6}\times 2\ \cdot\pi\cdot 100}\ j=100\ +208\ j=[230{,}8\ \Omega\,;64{,}3\ °]$$

3- En déduire la valeur de $\underline{I}$ et préciser si i est en avance/retard par rapport à u.

$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{[23{,}1\ ;64{,}3]}{[230{,}8\ ;63{,}4]}=[100\ mA\,;0°]$ i est bien la référence des phase et $\varphi(\underline{I},\underline{U})=64{,}3\ °$ (i en retard par rapport à u).

4- Montrez que l'impédance $\underline{Z}=R+j\left(L\cdot\omega-\frac{1}{C\cdot\omega}\right)$.

$\underline{Z}=\underline{Z}_R+\underline{Z}_L+\underline{Z}_C=R+j\,L\omega+\frac{1}{j\,C\,\omega}$. En mettant *j* en facteur : $\underline{Z}=R+j\left(L\cdot\omega-\frac{1}{C\cdot\omega}\right)$

5- Montrez que u et i sont en phase (résonance) si $f=\frac{1}{2\ \pi\sqrt{LC}}$. Calculer cette valeur.

Pour que les grandeurs u et i soient en phase, il faut que l'impédance $\underline{Z}$ soit un nombre réel pur; i.e. la partie imaginaire est nulle.

$$L\cdot\omega-\frac{1}{C\cdot\omega}=0\ \Leftrightarrow L\omega=\frac{1}{C\,\omega}\Rightarrow LC\,\omega^2=1\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\Leftrightarrow 2\ \pi\ f=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ \text{soit}\ \ f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Exercice n°4 :

Les trois dipôles sont maintenant branchés en parallèle est alimentés par la même tension u(t) trouvée à l'exercice n°3. $\underline{U}=[23{,}1\ V\,;64{,}3°]$

1- Calculer les intensités $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$ et $\underline{I}_C$.

$$\underline{I}_R=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_R}=\frac{[23{,}1\ ;64{,}3]}{[100\ ;0]}=[0{,}231\ A\,;64{,}3°]=0{,}1\ +0{,}21\ j$$

$$\underline{I}_L=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_L}=\frac{[23{,}1\ ;64{,}3]}{[314{,}2\ ;90]}=[0{,}0735\ A\,;-25{,}7\ °]=0{,}0662\ -0{,}0318\ j$$

$$\underline{I}_C=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C}=\frac{[23{,}1\ ;64{,}3]}{[106{,}1\ ;-90]}=[0{,}218\ A\,;154{,}3\ °]=-0{,}196\ +0{,}0942\ j$$

2- En déduire la valeur de $\underline{I}$ (intensité débité par le générateur) et préciser si i est en avance/retard par rapport à u.

$$\underline{I}=\underline{I}_R+\underline{I}_L+\underline{I}_C=(0{,}1\ +0{,}0662-0{,}196)+j(0{,}21-0{,}0381+0{,}0942)=-0{,}0299\ +0{,}270\ j=[272\ mA\,;96{,}3°]$$

L'intensité i est en avance par rapport à u de $\varphi(\underline{I},\underline{U})=-32°$

3- Déterminer ensuite la valeur de l'impédance $\underline{Z}$ du montage.

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{[23{,}1\ ;64{,}3]}{[0{,}272\ ;96{,}3]}=[84{,}3\ \Omega\,;-32\ °]$$

4- Montrer que $\underline{Z}=\dfrac{R}{1\ -j\,R\left(\dfrac{1}{L\omega}-C\omega\right)}$.

$$\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{\underline{Z}_R}+\frac{1}{\underline{Z}_L}+\frac{1}{\underline{Z}_C}\quad\text{soit}\quad\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\,L\omega}+\frac{1}{\dfrac{1}{jC\omega}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega$$

$$\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{jL\omega+R+j^2RLC\omega^2}{jRL\omega}\Rightarrow\underline{Z}=\frac{jRL\omega}{R-RLC\omega^2+jL\omega}=\frac{R}{\dfrac{R(1-LC\omega^2)}{jL\omega}+1}$$

$$\underline{Z}=\frac{R}{1-jR\left(\dfrac{1\ -LC\omega^2}{L\omega}\right)}=\frac{R}{1\ -jR\left(\dfrac{1}{L\omega}-C\omega\right)}$$

5- Pour quelle valeur de la fréquence f a-t-on la résonance ? i.e. : u et i sont en phase.

On obtient la résonance si $\underline{Z}$ est un réel pur i.e. $\frac{1}{L\omega}-C\omega=0\Rightarrow\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$f=f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=58{,}1\ Hz$$

Exercice n°5 :

Un générateur délivre une tension $\underline{U}=[10\ V\,;0]$ de fréquence f = 2 kHz et alimente un dipôle inconnu D.

L'intensité qu'il débite est $\underline{I}=[17\ mA\,;-38\ °]$.

1- Préciser quelle grandeur est en avance/retard l'une par rapport à l'autre et en déduire la valeur de $\varphi(\underline{I},\underline{U})$.

i est en retard par rapport à u ; $\varphi(\underline{I},\underline{U})=38°$

2- Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du dipôle.

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{[10\,;0]}{[17.10^{-3}\ ;-38]}=[588{,}24\ \Omega\,;38°]=463{,}54\ +362{,}15\ j$$

3- Le dipôle D est constitué d'une résistance R en série avec une inductance L. Déterminer la valeur de R ainsi que l'impédance de l'inductance Z_L et la valeur de L.

La forme rectangulaire de $\underline{Z}=R+jL\omega$

soit $R=463{,}54\ \Omega$ et $L\omega=362{,}15\ \Omega\Rightarrow L=\frac{362{,}15}{\omega}\approx 30\ mH$

Exercice n°6 :

Un circuit est composé de deux dipôles D_1 et D_2 branchés en série et sont alimentés par un générateur qui délivre une tension $\underline{U}=[10\ V\ ;0]$ et une intensité $\underline{I}$; f = 3 kHz.
D_1 est une résistance de 15 kΩ et D_2 est une inductance de 0,9 H.

1- Déterminer la tension $\underline{U_1}$ aux bornes de D_1 en utilisant le diviseur de tension.

On appelle $\underline{Z_1}$ l'impédance de la résistance et $\underline{Z_2}$ l'impédance de l'inductance.

Diviseur de tensions : $\underline{U_1}=\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}=\frac{[15.10^3\ ;0]}{15.10^3+16{,}9.10^3\ j}\times[10\ ;0]=[6{,}62\ V\ ;-48{,}5\ °]$

2- Déterminer la tension $\underline{U_2}$ aux bornes de D_2 en utilisant le diviseur de tension.

$\underline{U_2}=\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}=\frac{[16{,}9.10^3\ ;90]}{15.10^3+16{,}9.10^3\ j}\times[10\ ;0]=[7{,}49\ V\ ;41{,}5\ °]$

3- Vérifier que $\underline{U_1}+\underline{U_2}=\underline{U}$.

$\underline{U_1}+\underline{U_2}=[6{,}62\ ;-48{,}5]+[7{,}49\ ;41{,}5]=(4{,}39-4{,}96\ j)+(5{,}61+4{,}96\ j)=10+0\ j=[10\,V\ ;0°]$

4- Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du montage et en déduire la valeur de l'intensité $\underline{I}$.

$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\underline{Z_2}=15.10^3+16{,}9.10^3\ j=[22{,}6\ k\Omega\ ;48{,}5°]$

$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{[10\ ;0]}{[22{,}6.10^3 ;48{,}5°]}=[0{,}442\ mA\ ;-48{,}5°]$ i est en retard par rapport à u.

5- Donner la valeur de $\varphi(\underline{I},\underline{U})$.

$\varphi(\underline{I},\underline{U})=48{,}5°$

Exercice n°7 :

Même exercice que le numéro 6 avec D_1 est une résistance de 5 kΩ et D_2 est un condensateur de 10 nF.

1- Déterminer la tension $\underline{U_1}$ aux bornes de D_1 en utilisant le diviseur de tension.

On appelle $\underline{Z_1}$ l'impédance de la résistance et $\underline{Z_2}$ l'impédance du condensateur.

Diviseur de tensions : $\underline{U_1}=\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}=\frac{[5.10^3\ ;0]}{5.10^3-5{,}3.10^3\ j}\times[10\ ;0]=[6{,}7\ V\ ;46{,}7\ °]$

2- Déterminer la tension $\underline{U_2}$ aux bornes de D_2 en utilisant le diviseur de tension.

$\underline{U_2}=\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U}=\frac{[5{,}3.10^3\ ;90]}{5.10^3+5{,}3.10^3\ j}\times[10\ ;0]=[7{,}3\ V\ ;-43{,}3\ °]$

3- Vérifier que $\underline{U_1}+\underline{U_2}=\underline{U}$.

$\underline{U_1}+\underline{U_2}=[6{,}7\ ;46{,}7]+[7{,}3\ ;-43{,}3]=(4{,}7+5\ j)+(5{,}3-5\ j)=10+0\ j=[10\,V\ ;0°]$

4- Calculer l'impédance $\underline{Z}$ du montage et en déduire la valeur de l'intensité $\underline{I}$.

$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\underline{Z_2}=5.10^3+5{,}3.10^3\ j=[7{,}3\ k\Omega\ ;-46{,}7°]$

$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{[10\ ;0]}{[7{,}3.10^3 ;-46{,}7°]}=[1{,}36\ mA\ ;46{,}7°]$ i est en avance par rapport à u.

5- Donner la valeur de $\varphi(\underline{I},\underline{U})$.

$\varphi(\underline{I},\underline{U})=-46{,}7°$