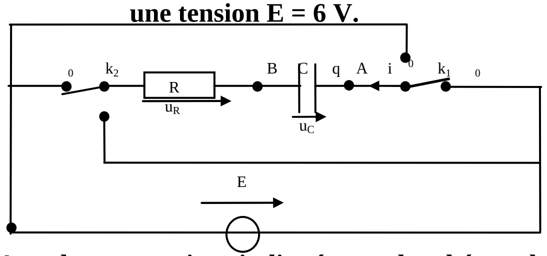
CORRECTION

Exercice n°1 :Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur de tension délivrant une tension E = 6 V.



1- Avec les conventions indiquées sur le schéma, donner les relations liant :

1.1- u_R, **R et i.** *Loi d'ohm :* $\boxed{uR = U.I}$

1.2- u_C, **q et C.** *Par définition :* $\boxed{uC = \frac{q}{C}}$

1.3- **i et dq / dt.** *Par définition :* $\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$

2- **A l'instant t = 0, le condensateur est déchargé. Le commutateur k_1 est en position 1 et le commutateur k_2 est en position 0.**

2.1- **Etablir l'équation différentielle régissant u_C (t).**

En appliquant la loi des mailles, on trouve : $E = R.i + uC$.

Or, $i = \frac{dq}{dt}$ *et* $q = C.uC$ *d'où* $i = C.\frac{duC}{dt}$ *ce qui permet d'établir l'équation différentielle régissant $u_C(t)$:* $\boxed{E = R.C.\frac{duC}{dt} + uC}$

2.2- **Etablir l'équation différentielle régissant q (t).**

En appliquant la loi des mailles, on trouve : $E = R.i + uC$.

Or, $i = \frac{dq}{dt}$ *et* $uC = \frac{q}{C}$ *d'où l'équation différentielle régissant la charge q (t):*

$$\boxed{R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E}$$

2.3- Montrer que q (t) vérifie l'équation : $R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$.

La relation trouvée à la question 2.2 est identique à $R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$.

3- **Vérifier que** $uC(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ **est une solution de l'équation trouvée à la question 2- 2.1-.**

La relation est : $E = R.C.\frac{duC}{dt} + uC$ *donc il faut calculer la dérivée par rapport au temps de u_c (t).*

$\frac{duC}{dt} = \frac{d}{dt}\left[E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\right] = E(\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}})$. *Remplaçons* $\frac{duC}{dt}$ *par son expression dans l'équation différentielle.*

$\boxed{E = R.C.\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E.e^{-\frac{t}{RC}} + E - E.e^{-\frac{t}{RC}} = E}$ *donc $u_C(t)$ vérifie bien l'équation différentielle.*

4- **Définir la constante de temps τ .** $\boxed{\tau = R.C.}$

5- **Que vaut u_C (t) au bout de 5 τ ?** $\underline{uC(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 6.(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}) = 6.(1 - e^{-5}) = 5{,}95V}$

6- **Quelle est la quantité d'électricité Q emmagasinée par le condensateur au bout d'une durée supérieure à 5 τ ?**

On considère que pour une durée supérieure à 5τ, le condensateur est complètement chargé et que sa tension à ses bornes est de 6V (question précédente). Or, la tension aux bornes d'un condensateur est donnée par la formule : $uC = \frac{q}{C}$ *soit, lorsque le condensateur est chargé :* $UC = \frac{Q}{C}$ *soit* $\boxed{Q = C.Uc = 1.10^{-6}.6 = 6\mu C}$.

7- **On donne R = 100 kΩ et C = 1 μF.**

7.1- **Quelle est la valeur numérique de la constante de temps τ ?**

$$\boxed{\tau = R.C = 100.10^3 \times 1.10^{-6} = 100.10^{-3} = 100ms = 0{,}1s}$$

7.2- **Quelle est l'intensité i du courant dans le circuit au bout de 1 seconde ?**

Lorsque le condensateur est chargé, la tension à ses bornes u_C=6V et E=6V. D'après la loi des mailles, E=R.i+u_C soit $\boxed{i = \frac{E - uc}{R} = \frac{6-6}{100.10^3} = 0}$.

8- **En réalité, la charge du condensateur ne peut s'effectuer complètement, car un dispositif fait basculer les commutateurs en même temps lorsque u_C = 3 V.**

En prenant comme nouvelle origine des temps cet instant de commutation, la tension u_C (t) évolue suivant l'expression : $uc = -E.(1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{t}{RC}})$ **.**

8.1- **Calculer u_C (t) à t = 0 et lorsque t tend vers l'infini.**

$$\boxed{uc(0) = -6 \times (1 - \frac{3}{2}e^{-0}) = -6(1 - \frac{3}{2}) = -6 \times (-\frac{1}{2}) = 3V}$$

$$\boxed{uc(\infty) = -6 \times (1 - \frac{3}{2}e^{-\infty}) = -6 \times (1 - 0) = -6V}$$

8.2- **Un nouveau basculement intervient lorsque u_C atteint - 3V. Calculer l'intervalle de temps Δt compris entre ces deux basculements.**

Calculer Δt c'est calculer l'instant t_1 à partir duquel $\underline{u_C(t)=-3V}$ soit :

$uc(t_1) = -3 = -6(1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{t_1}{\tau}})$ *soit* $\frac{-3}{-6} = 1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ *ce qui fait que* $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ *d'où* $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_1}{\tau}}$.

Soit $\ln(\frac{1}{3}) = \ln(e^{-\frac{t_1}{\tau}}) = -\frac{t_1}{\tau}$ *d'où* $\boxed{t_1 = \tau \ln 3 = 0{,}1 \times \ln 3 = 109{,}8ms.}$